

1.5. ЕЛЕМЕНТИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ І ТЕОРІЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

1.5.1. НАПРУЖЕННЯ І ДЕФОРМАЦІЇ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Суцільне середовище — це гіпотетичне середовище, яке під дією навантажень може як завгодно змінювати свою форму (деформуватись), не порушуючи при цьому суцільності.

Методи механіки суцільних середовищ широко застосовуються в інженерній практиці для розрахунків і прогнозування напруженого стану та деформацій твердих тіл, течій рідин, газів та їх сумішей і т. ін.

Зовнішні сили, які діють на тіло (середовище), що розглядається, поділяються на поверхневі та об'ємні.

Поверхневі сили виникають внаслідок контакту тіла із зовнішнім середовищем і всередині суцільного середовища відповідно до третього закону Ньютона врівноважуються. Це сили тиску, тертя, взаємодії і т. ін. Вони можуть бути неперервними і зосередженими.

Об'ємні сили — це результат дії на середовище просторового векторного поля. Об'ємні сили неперервно розподілені по середовищу. Це сили інерції, гравітаційні сили і т. ін.

При дії зовнішніх сил між окремими частинками суцільного середовища виникають сили взаємодії, які називаються *внутрішніми силами*. Вони визначають **напружений стан суцільного середовища**, який характеризується дев'ятьма компонентами напружень (рис. 1.14).

Ці напруження, складені у формі матриці, визначають *тензор напружень*

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}, \quad (1.32)$$

де $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ — нормальні напруження;

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \dots, \tau_{zy}$ — дотичні напруження.

Тензор напружень (1.32) є симетричним відносно головної діагоналі.

У кожній точці суцільного середовища існують такі три взаємно перпендикулярні площадки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулю.

Напрями нормалей до цих площадок утворюють *головні напрями тензора напружень* та не залежать від вихідної системи координат. Відповідні напруження $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ називають *головними нормальними напруженнями*, які утворюють тензор

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

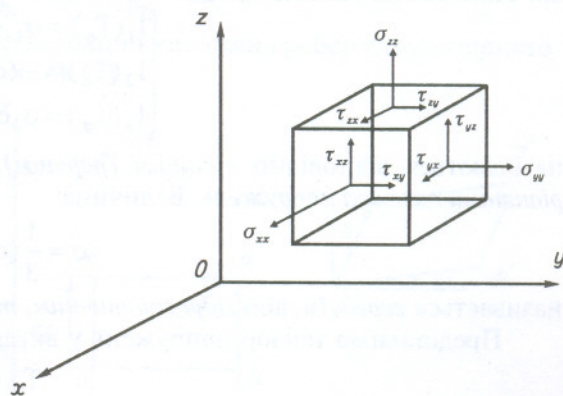


Рис. 1.14. Компоненти напружень у декартовій системі координат

У перерізах, що порівню поділяють кути між головними площинами і проходять через головні осі 1, 2 та 3 (рис. 1.15), дотичні напруження досягають екстремальних значень і називаються *головними дотичними напруженнями*:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (1.33)$$

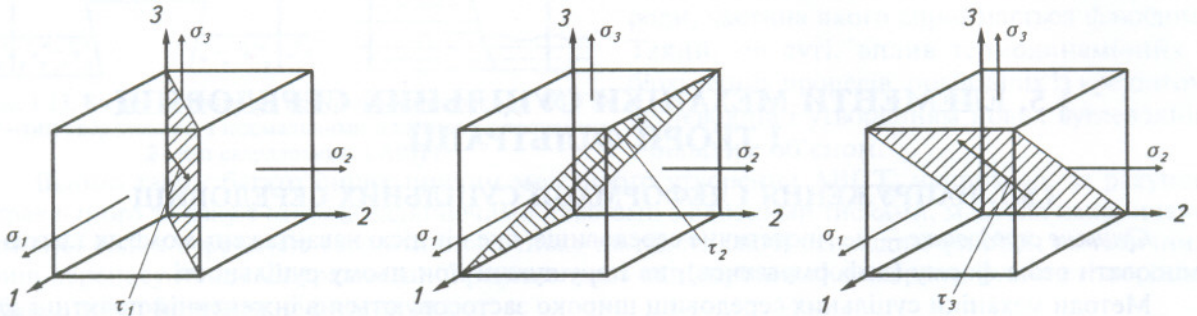


Рис. 1.15. Головні нормальні і дотичні напруження

Головні нормальні напруження σ_i ($i = 1, 2, 3$) є коренями кубічного рівняння

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \lambda & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \lambda & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

або

$$-\lambda^3 + I_1(T_\sigma)\lambda^2 + I_2(T_\sigma)\lambda + I_3(T_\sigma) = 0. \quad (1.34)$$

Оскільки нормальні напруження не залежать від вибору координатної сітки, то, очевидно, коефіцієнти кубічного рівняння (1.34) не залежать від вибору системи координат. Ці коефіцієнти, які записані на головних осях

$$\begin{cases} I_1(T_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \equiv 3\sigma; \\ I_2(T_\sigma) = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3); \\ I_3(T_\sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3, \end{cases} \quad (1.35)$$

називаються відповідно *лінійним (першим), квадратичним (другим) і кубічним (третьім) інваріантами тензора напружень*. Величина

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

називається *середнім, або гідростатичним, тиском* у даній точці.

Представимо тензор напружень у вигляді суми

$$T_\sigma = \sigma T_1 + D_\sigma, \quad (1.36)$$

де T_1 — одиничний тензор, а величина σT_1 називається *кульовим (сферичним) тензором*, що відповідає середньому тиску в даній точці;

$$D_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} \quad \text{— тензор, що визначає дотичні напруження в даній точці і називається } \textit{девіатором напружень}.$$

Девіатор напружень характеризується головними напрямками, які збігаються з напрямками тензора напружень, а головні значення напружень девіатора $\sigma_{Di} = \sigma_i - \sigma$.

Інваріанти девіатора напружень визначаються за системою

$$\begin{cases} I_1(D_\sigma) = 0; \\ I_2(D_\sigma) = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]; \\ I_3(D_\sigma) = \sigma_{D1}\sigma_{D2}\sigma_{D3}. \end{cases} \quad (1.37)$$

Величина

$$T = +\sqrt{I_2(D_\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \quad (1.38)$$

називається інтенсивністю дотичних напружень.

Нехай в процесі деформації середовища точки останнього одержали переміщення u з компонентами u_x , u_y та u_z (рис. 1.16). Деформація середовища характеризується симетричним тензором деформацій

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}. \quad (1.39)$$

Складові T_ε для малих деформацій визначаються за допомогою рівнянь Коші:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (1.40)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}; \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}.$$

Величини ε_{xx} , ε_{yy} та ε_{zz} характеризують відносні деформації видовжень ребер елементарного паралелепіпеда, а γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} — деформації їх зсуву (рис. 1.17).

Тензор деформації, як будь-який симетричний тензор, приводиться до головних осей

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix},$$

де ε_1 , ε_2 , ε_3 — головні деформації видовження.

Це означає, що будь-яка деформація може бути здійснена простими розтягами в трьох взаємно перпендикулярних напрямках.

Різниця

$$\gamma_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2; \gamma_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3; \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \quad (1.41)$$

називаються головними зсувами.

Інваріанти тензора деформації утворюються так само, як і для тензора напружень:

$$\begin{cases} I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ I_2(T_\varepsilon) = -(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3); \\ I_3(T_\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{cases} \quad (1.42)$$

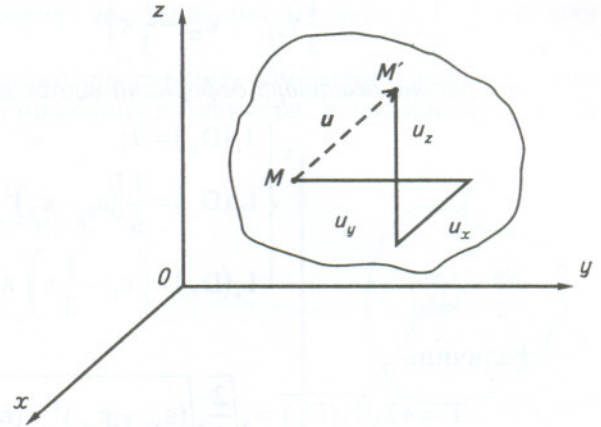


Рис. 1.16. Деформація точки суцільного середовища

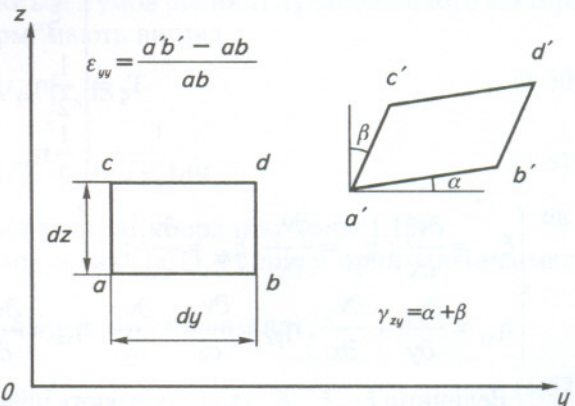


Рис. 1.17. Схема деформації грані елементарного паралелепіпеда в площині, паралельній площині $yo\hat{z}$

Тензор деформації може бути представлений у вигляді

$$T_{\varepsilon} = \frac{1}{3}\varepsilon T_1 + D_{\varepsilon}, \quad (1.43)$$

де $\frac{1}{3}\varepsilon T_1$ — кульовий (сферичний) тензор, який визначає об'ємну деформацію ($\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$);

$$D_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - \frac{1}{3}\varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} - \frac{1}{3}\varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} - \frac{1}{3}\varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{— девіатор деформації, який характеризує зміну форми елемента середовища, зумовлену зсувами.}$$

Інваріанти девіатора деформації відповідно рівні

$$\begin{cases} I_1(D_{\varepsilon}) = 0; \\ I_2(D_{\varepsilon}) = \frac{1}{6}[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2]; \\ I_3(D_{\varepsilon}) = \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{3}\varepsilon\right)\left(\varepsilon_2 - \frac{1}{3}\varepsilon\right)\left(\varepsilon_3 - \frac{1}{3}\varepsilon\right). \end{cases} \quad (1.44)$$

Величина

$$\Gamma = +2\sqrt{I_2(D_{\varepsilon})} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)} \quad (1.45)$$

називається *інтенсивністю деформацій зсуву*.

Нехай частинки середовища рухаються зі швидкістю $\mathbf{v}$, складові якої відповідно дорівнюють $v_x(x, y, z, t)$; $v_y(x, y, z, t)$ і $v_z(x, y, z, t)$. Протягом часу dt середовище деформується на величину, що визначається переміщеннями $v_x dt$, $v_y dt$ та $v_z dt$. Компоненти цієї деформації, що вираховуються з допомогою рівнянь Коші (1.40), мають загальний множник dt , розділивши на який, одержимо компоненти *тензора швидкостей деформації*

$$T_{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_{xx} & \frac{1}{2}\eta_{yx} & \frac{1}{2}\eta_{zx} \\ \frac{1}{2}\eta_{xy} & \xi_{yy} & \frac{1}{2}\eta_{zy} \\ \frac{1}{2}\eta_{xz} & \frac{1}{2}\eta_{yz} & \xi_{zz} \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

$$\text{де } \begin{cases} \xi_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}; \xi_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}; \xi_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ \eta_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}; \eta_{yz} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}; \eta_{xz} = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}. \end{cases} \quad (1.47)$$

Величини ξ_{xx} , ξ_{yy} , ξ_{zz} характеризують швидкості відносних видовжень у напрямках координатних осей, а η_{xy} , η_{yz} , η_{xz} — кутові швидкості перекошування початково прямих кутів. Швидкість відносного об'ємного розширювання дорівнює

$$\xi = \xi_{xx} + \xi_{yy} + \xi_{zz} = \text{div } \mathbf{v}. \quad (1.48)$$

Крім швидкості чистої деформації, елементарний об'єм зазнає жорсткого зміщення, що визначається поступальною швидкістю $\mathbf{v}$ та обертанням з кутовою швидкістю

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}.$$

Інваріанти тензора швидкостей деформацій можна одержати таким самим шляхом, як і для деформацій. Для цього необхідно у формули (1.42)–(1.45) внести відповідні заміни. Наприклад, для інтенсивності швидкостей деформацій зсуву

$$H = +2\sqrt{I_2(D_\xi)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\xi_{xx} - \xi_{yy})^2 + (\xi_{xx} - \xi_{zz})^2 + (\xi_{yy} - \xi_{zz})^2 + 3(\eta_{xy}^2 + \eta_{xz}^2 + \eta_{yz}^2)}. \quad (1.49)$$

1.5.2. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Система рівнянь, яка описує напружений стан і деформацію суцільних середовищ, включає фундаментальні рівняння руху, неперервності і енергії, а також рівняння реології і стану. Фундаментальні рівняння базуються на законах ньютонівської механіки і є необхідними, а рівняння реології і стану замикають їх і утворюють необхідну і достатню систему рівнянь для розв'язку задач механіки суцільних середовищ.

Рівняння руху для довільного об'єму V суцільного середовища, обмеженого замкнутою поверхнею S (рис. 1.18), базуються на використанні принципу д'Аламбера. У загальному випадку на даний об'єм діють об'ємні сили

$$\int_V \mathbf{a}(x, y, z, t) \rho(x, y, z, t) dV \quad \text{з вектором прискорень } \mathbf{a},$$

поверхневі сили

$$\int_S \boldsymbol{\tau}_S(x, y, z, t) dS \quad \text{з вектором напружень } \boldsymbol{\tau}_S$$

та сили інерції

$$\int_V \rho(x, y, z, t) \frac{d\mathbf{v}}{dt}(x, y, z, t) dV \quad \text{з вектором прискорень } \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

де $\rho(x, y, z, t)$ — густина середовища.

Вектор напружень визначається через компоненти тензора напружень (1.32)

$$\boldsymbol{\tau}_S = (\sigma_{xx} + \tau_{yx} + \tau_{zx})\mathbf{i} + (\tau_{xy} + \sigma_{yy} + \tau_{zy})\mathbf{j} + (\tau_{xz} + \tau_{yz} + \sigma_{zz})\mathbf{k},$$

де $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орти декартової системи координат.

Рівняння руху суцільного середовища визначаються з умов рівності нулю головного вектора та головного моменту всіх сил і в інтегральній формі мають вигляд

$$\int_V \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rho dV = \int_V \mathbf{a} \rho dV + \int_S \boldsymbol{\tau}_S dS; \quad (1.50)$$

$$\int_V \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \rho dV = \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \rho dV + \int_S (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_S) dS, \quad (1.51)$$

де $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z, t)$ — радіус-вектор точки у вибраній системі координат (рис. 1.18).

Рівняння (1.51) вказує на симетрію тензора напружень (1.32), і апіорі приймаючи симетрію T_σ , можна його не використовувати.

Рівняння (1.50) у векторній диференціальній формі матиме вигляд

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{a} + \text{Div } T_\sigma. \quad (1.52)$$

Похідна $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ характеризує зміну швидкості матеріальної точки суцільного середовища, що переміщується у просторі і називається *субстанційною похідною*. Вона визначається як

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (1.53)$$

де $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ — операція Гамільтона.

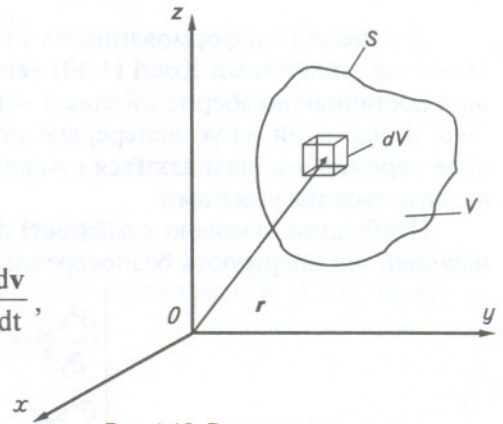


Рис. 1.18. Розрахункова схема

Перший доданок $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ називається *локальною похідною* і характеризує зміну швидкості у фіксованій точці простору з часом, а другий доданок $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ — *конвективною похідною* і характеризує зміну швидкості при переміщенні з однієї точки в іншу.

Рівняння неперервності зв'язує густину з характеристиками руху суцільного середовища, що встановлюється на основі закону збереження маси: повна зміна маси у замкненому об'ємі дорівнює нулю

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho v_n dS = 0,$$

де перша складова характеризує зміну маси в довільно вибраному об'ємі V , а друга — масу середовища, що притікає або відтікає через поверхню S за одиницю часу (v_n — проекція швидкості на нормаль до поверхні S).

У диференціальній формі рівняння неперервності представляється так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.54)$$

Для твердих деформованих тіл у випадку, коли компоненти неперервного поля переміщень задані, за рівняннями Коші (1.40) легко визначаються компоненти поля деформацій. Складніше з постановкою оберненої задачі — визначенню переміщень за деформаціями. Не для всякого поля деформацій існує неперервне поле переміщень. Деформації, яким відповідає неперервне поле переміщень, називаються сумісними деформаціями. У протилежному випадку деформації називаються несумісними.

Необхідною умовою сумісності деформацій є їх відповідність *геометричним рівнянням сумісності*, які одержують безпосередньо з рівнянь Коші (1.40):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = 0; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = 0; \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 0; \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 0; \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (1.55)$$

Рівняння (1.55) забезпечують, по суті, суцільність деформованого твердого тіла і називаються також *рівняннями суцільності*, або *неперервності*.

Рівняння енергії відображає закон збереження енергії для суцільного середовища і є наслідком фундаментального закону фізики — першого начала термодинаміки. У диференціальній формі рівняння енергії при відсутності внутрішніх джерел теплоти має вигляд

$$\rho \frac{dU}{dt} = \operatorname{div}(\lambda \nabla T) + T_\sigma T_\xi, \quad (1.56)$$

де U — питома (віднесена до одиниці маси) внутрішня енергія суцільного середовища;

T — температура;

λ — коефіцієнт теплопровідності суцільного середовища.

Система рівнянь (1.52), (1.54) і (1.56) представляє необхідні фундаментальні рівняння руху суцільного середовища.

Рівняння реології визначають зв'язок між компонентами тензора напружень та тензорів деформацій і швидкостей деформацій. Рівняння реології одержані, як правило, на основі дослідних даних. Параметри цих рівнянь або моделей (див. табл. 1.6) визначають реологічні властивості.

Реологічна модель абсолютно пружного тіла ґрунтується на припущенні, що напруження в кожній точці суцільного середовища і в будь-який момент часу визначаються деформаціями в цій самій точці і в той самий момент часу. Для малих деформацій зв'язок між компонентами тензорів напружень T_{σ} і деформацій T_{ϵ} можна вважати лінійним. Таке співвідношення задає реологічне рівняння абсолютно пружного тіла, яке для ізотропного матеріалу представляється узагальненим законом Гука:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]; \\ \epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]; \\ \epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]; \\ \gamma_{xy} = \tau_{xy} / G; \gamma_{xz} = \tau_{xz} / G; \gamma_{zy} = \tau_{zy} / G, \end{cases} \quad (1.57)$$

де E , G — модуль пружності при розтягу (стисненні) та зсуву;
 μ — коефіцієнт Пуассона.

У термінах інваріантів тензорів напружень (1.35), (1.36) і деформацій (1.42), (1.43) закон Гука (1.57) можна представити у вигляді

$$\begin{cases} \sigma = K\epsilon; \\ D_{\sigma} = 2GD_{\epsilon}, \end{cases} \quad (1.58)$$

де $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ — модуль об'ємної деформації.

У процесі руху між окремими частинками суцільного середовища виникають сили внутрішнього тертя, які залежать від швидкості зміни відстані між частинками, що характеризуються тензором швидкостей деформацій (1.46). На основі припущення про лінійний характер цієї залежності одержано *реологічне рівняння в'язкого середовища*, яке для ізотропної рідини записується у вигляді узагальненого закону Ньютона:

$$D_{\sigma} = 2\eta D_{\epsilon}, \quad (1.59)$$

де η — коефіцієнт внутрішнього тертя (в'язкість).

Реологічна модель ідеальної рідини характеризується відсутністю внутрішнього тертя як у стані спокою, так і в процесі її руху:

$$D_{\sigma} = 0. \quad (1.60)$$

З умови (1.60) випливає, що у кожній точці ідеальної рідини нормальні напруження дорівнюють гідростатичному тиску σ у даній точці.

Для найпростішого (одновимірного) випадку при деформаціях зсуву рівняння реології визначають залежність між дотичним напруженням зсуву τ та деформацією зсуву γ і (або) її градієнтом $\dot{\gamma}$.

Рідини, реологічні моделі яких описуються рівнянням Ньютона (1.59), називають *ньютонівськими*. У нафтопромисловій справі часто використовуються технологічні рідини, реологічні моделі яких не відповідають рівнянню (1.59). Відповідно до класифікації А. Метцнера, виділяють такі групи реологічних рідин:

реологічно стаціонарних (ньютонівські та неньютонівські) рідин — $\tau = \tau(\dot{\gamma})$;

реологічно нестационарних рідин — $\tau = \tau(\dot{\gamma}, t)$;

в'язкопружних рідин — $\tau = \tau(\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma})$;

реологічно складних рідин з властивостями, які притаманні вищевказаним групам.

До *неньютонівських рідин* належать: аномально в'язка рідина Оствальда (1.17); в'язкопластична рідина Шведова—Бінгама (1.18); нелінійна в'язкопластична рідина Гершеля—Балклі

$$\tau = \tau_0 + \eta \dot{\gamma}^n, \quad (1.61)$$

Шульмана—Кессона

$$\tau^n = \tau_0^n + (\eta \dot{\gamma})^n \quad \text{та ін.} \quad (1.62)$$

На рис. 1.19 показані графіки реологічних рівнянь нелінійних моделей в'язкопластичних рідин (1.61) і (1.62). Модель Гершеля—Балклі узагальнює моделі Ньютона, Оствальда і Шведова—Бінгама.

До *в'язкопружних* належать рідини, реологічні моделі яких описуються рівняннями Максвелла

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\eta}, \quad (1.63)$$

Фойгта

$$\tau = G\gamma + \eta \dot{\gamma} \quad (1.64)$$

або їх узагальненням для рідин із пластичними властивостями

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau - \tau_0}{\eta}, \quad (1.65)$$

$$\tau = \tau_0 + G\gamma + \eta \dot{\gamma}. \quad (1.66)$$

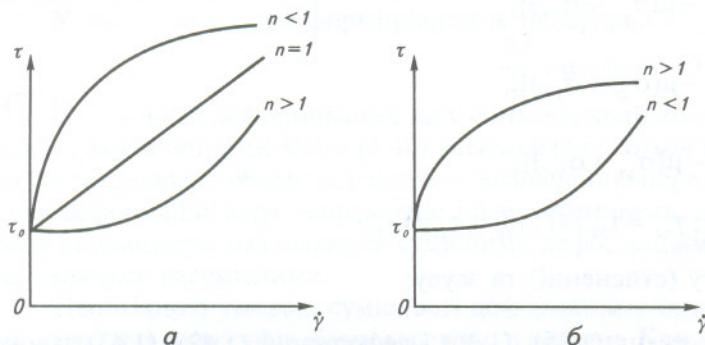


Рис. 1.19. Графіки реологічних рівнянь нелінійних моделей в'язкопластичних рідин:

а—модель Гершеля—Балклі; б—модель Шульмана—Кессона

Реологічні моделі (1.63)—(1.66) описують явища релаксації напружень і повзучості (див. рис. 1.1, е, є).

Реологічні моделі другої та четвертої груп майже не використовуються у нафтопромисловій справі.

Рівняння стану. Рух суцільного середовища призводить до зміни параметрів стану (тиску p і температури T), що впливає на фізичні властивості (густину, реологічні і теплофізичні властивості та ін.) середовища. Таким чином, для розв'язання задач руху суцільного середовища необхідні рівняння, які пов'язують фізичні властивості середовища з параметрами стану і утворюють спільно з фундаментальними рівняннями руху та рівняннями реології замкнену систему рівнянь. Рівняння стану відображають у загальному випадку залежність фізичних властивостей a середовища від параметрів стану

$$a = a(p, T) \quad (1.67)$$

і визначаються, як правило, на основі експериментальних даних. У формулі (1.67) компонентами вектора a є величини, що входять у фундаментальні рівняння руху суцільного середовища та рівняння реології.

На практиці до рівнянь стану, в основному, належить залежність густини від параметрів стану. При цьому нехтують впливом умов на інші властивості. Таке припущення у більшості випадків є необхідним для спрощення вихідних диференціальних рівнянь.

Розглянемо поширені форми рівнянь стану для густини суцільного середовища. Для нестискуваного середовища в ізотермічних умовах $\rho = \text{idem}$, баротропне середовище характеризується залежністю $\rho = \rho(p)$, а бароклінне — $\rho = \rho(p, T)$.

У залежності від діапазону зміни тисків та температур використовують різні форми рівнянь стану для рідин:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \beta_p(p - p_0)}; \quad \rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta_T(T - T_0)}; \quad \rho = \rho_0 \exp[\alpha_p(p - p_0)] \quad \text{та ін.},$$

де ρ_0 — густина рідини при тиску p_0 і температурі T_0 ;

β_p, β_T — відповідно коефіцієнти об'ємного стиснення і розширення рідини;

α_p — емпіричний коефіцієнт.

Для бурових глинистих розчинів, за експериментальними даними В.О. Хуршудова, В.В. Балабешка та В.С. Семенякіна, рівняння стану має вигляд

$$\rho = \rho_0 [1 + a_0(p - p_0) + a_1(T - T_0) + a_2(T - T_0)^2 + a_3(T - T_0)^3], \quad (1.68)$$

де ρ_0 — густина розчину при атмосферному тиску p_0 і температурі $T_0 = 293$ К;

$a_0 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Па}^{-1}$; $a_1 = 2,48 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$; $a_2 = -8,9 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-2}$; $a_3 = 2,68 \cdot 10^{-8} \text{ К}^{-3}$.

Формула (1.68) одержана для діапазону температур 293–423 К.

Стан ідеального газу описується рівнянням Клапейрона–Менделєєва

$$\rho = \frac{\mu p}{RT},$$

де μ — молярна маса газу;

R — універсальна газова стала.

Для ізотермічного процесу

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0},$$

де ρ, ρ_0 — густина газу відповідно при тисках p і p_0 .

Якщо процес адіабатичний (відбувається без теплообміну з навколишнім середовищем), то рівняння стану має вигляд

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}},$$

де $k = c_p/c_v$ — показник адіабати;

c_p, c_v — теплоємність газу при сталих тиску і об'ємі.

Стан реального газу описується рівнянням (1.21).

Математична постановка задачі механіки суцільних середовищ включає вибір системи рівнянь та підготовку додаткових умов, яким має задовольняти розв'язок задачі на границях області її визначення. Додаткові умови, які поділяють на *початкові* та *граничні*, дають змогу виділити єдиний (у разі його існування) розв'язок із множини існуючих розв'язків системи рівнянь, що описує конкретне явище. Таким чином, початкові та граничні умови мають забезпечити існування та єдиність розв'язку сформульованої задачі.

Початкові умови задають у випадку, коли сформульована задача є нестационарною. Їх кількість визначається порядком похідної шуканої функції в часі. Так, наприклад, для рівнянь руху (1.52) початкова умова задає в загальному випадку закон розподілу швидкості в області її визначення D в момент часу $t = 0$, тобто

$$\mathbf{v}(D, t)|_{t=0} = \mathbf{v}_0(D).$$

Граничні або крайові умови задають характер зміни в часі шуканої функції на границі S області визначення D . У загальному випадку крайові умови можуть бути задані різними способами:

статично — на границі S задаються поверхневі сили;

кінематично — задаються переміщення або швидкості точок границі S ;

змішано — на одних ділянках границі задаються статичні, а на інших — кінематичні крайові умови.

У задачах руху рідин та газів мають місце змішані крайові умови. На одних ділянках задають напруження, а на інших — швидкість. Для реальних рідин остання крайова умова зводиться до умови Стокса (прилипання рідини до стінок):

$$\mathbf{v}(D, t)|_{S \in D} = \mathbf{v}_S(t),$$

де $\mathbf{v}_S(t)$ — швидкість переміщення стінки.

Для рідин, що характеризуються пластичними властивостями, граничні умови записують також на поверхні пластичності.

1.5.3. РІВНЯННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТВЕРДИХ ТІЛ

Рівняння теорії пружності для незмінних властивостей тіла включають рівняння руху (1.52), Коші (1.40) та узагальнений закон Гука (1.57). Для квазістатичних процесів ($dv/dt = 0$) рівняння руху в скалярній формі мають вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho a_x = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho a_y = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho a_z = 0, \end{cases} \quad (1.69)$$

де a_x, a_y, a_z — проекції вектора прискорень об'ємних сил на відповідні координатні осі.

Системи рівнянь (1.40), (1.57) і (1.69) вміщують 15 рівнянь з 15 невідомими (6 складових тензора напружень — $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$; 3 складових вектора переміщень — u_x, u_y, u_z та 6 складових тензора деформацій — $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$), тобто є замкнутими. Розв'язок задач теорії пружності знаходять інтегруванням цих систем лінійних диференціальних рівнянь із відповідними граничними умовами, які бувають статичними (задані сили), кінематичними (задані переміщення), змішаними (задані сили і переміщення).

Виділяють пряму та обернену задачі теорії пружності. У прямій задачі вважають відомими всі об'ємні та поверхневі сили або переміщення на границі тіла. Необхідно визначити поле переміщень, деформацій та напружень у тілі. В оберненій задачі відомою є одна із трьох систем функцій напружень, переміщень, деформацій або їх комбінація. Необхідно визначити невідомі компоненти, в тому числі граничні умови.

Пряма задача зустрічається на практиці частіше, ніж обернена, і є більш складною, що зумовлено складністю систем рівнянь (1.40), (1.57) і (1.69) та різноманітністю граничних умов. Обернена задача виникає, в основному, при перевірці наближених розв'язків і в цьому розумінні не є проблематичною.

У випадку, коли вектор прискорень $\mathbf{a}$ об'ємних сил не залежить від координат, система рівнянь теорії пружності може бути представлена системою бігармонічних рівнянь:

в переміщеннях

$$\Delta^2 u_x = 0; \quad \Delta^2 u_y = 0; \quad \Delta^2 u_z = 0 \quad (1.70)$$

або в напруженнях

$$\begin{aligned} \Delta^2 \sigma_{xx} &= 0; \quad \Delta^2 \sigma_{yy} = 0; \quad \Delta^2 \sigma_{zz} = 0; \\ \Delta^2 \tau_{xy} &= 0; \quad \Delta^2 \tau_{xz} = 0; \quad \Delta^2 \tau_{yz} = 0, \end{aligned} \quad (1.71)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — операція Лапласа.

Плоска задача теорії пружності використовується у випадках, коли можна прийняти припущення про залежність сил, переміщень і деформацій тільки від двох координат. Для постійних компонент вектора прискорень об'ємних сил a_x та a_y розв'язок плоскої задачі в напруженнях зводиться до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\rho a_x; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = -\rho a_y; \\ \Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \end{cases} \quad (1.72)$$

Третє рівняння (1.72) називається умовою Моріса—Леві.

Розв'язок системи (1.72) можна суттєво спростити, якщо перейти від трьох невідомих функцій σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} до однієї функції $\psi = \psi(x, y)$, що називається функцією напружень, або функцією Ейрі. Якщо існує така довільна функція $\psi = \psi(x, y)$, що задовольняє рівнянням

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}; & \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \rho a_x y - \rho a_y x, \end{cases} \quad (1.73)$$

то вона буде розв'язком плоскої задачі в напруженнях при виконанні умови Моріса—Леві

$$\Delta^2 \psi = 0. \quad (1.74)$$

Отже, розв'язком плоскої задачі в напруженнях є бігармонічна функція $\psi = \psi(x, y)$, яка задовольняє рівнянню (1.74) та відповідним граничним умовам на контурі твердого тіла. Напружений стан у довільній точці тіла визначається за формулами (1.73).

Рівняння теорії пластичності для незмінних властивостей тіла базуються на рівняннях рівноваги (1.69), Коші (1.40) і умови пластичності (рівняння реології).

Для загального випадку навантаження тіло можна поділити на дві частини, в одній з яких діють тільки пружні деформації, а в іншій — пластичні. При цьому виникає необхідність визначення границі між цими частинами. Для одноосового навантаження ця границя визначається границею текучості σ_T : при $\sigma < \sigma_T$ справедливий закон Гука, а при $\sigma \geq \sigma_T$ використовують інші залежності між напруженнями і деформаціями. При плоскому або об'ємному напруженому стані застосовують критерії або умови пластичності (текучості), які є функцією інваріантів (1.35) тензора напружень.

Критерій Сен-Венана—Леві сформульований на припущенні, що пластичний стан настає при досягненні максимальних дотичних напружень границі текучості матеріалу і для об'ємного напруженого стану виражається формулою

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{\sigma_T}{2} = \tau_T, \quad (1.75)$$

де τ_T — границя текучості матеріалу при зсуві.

Критерій Губера—Мізеса базується на припущенні, що пластичний стан настає при досягненні певного значення питомої пружної енергії деформації, характерної для даного матеріалу:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2. \quad (1.76)$$

Умова Губера—Мізеса для чистого зсуву

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \approx 0,577\sigma_T.$$

Досліди показують, що пластичні деформації при чистому зсуві виникають при $\tau_{\max} = (0,56... 0,60)\sigma_T$. Таким чином, умова пластичності Губера—Мізеса (1.76) дещо краще відповідає дослідним даним, ніж умова Сен-Венана—Леві (1.75). Втім, у теорії пластичності обидва критерії (1.75) і (1.76) посідають рівноцінне місце. Їх вибір, як правило, визначається простотою розв'язання конкретної задачі.

Наведені критерії пластичності дають змогу визначити появу пластичних деформацій. Вони можуть бути використані як рівняння реології при розв'язанні задач пластичності для матеріалів, деформація яких при одноосовому напруженому стані відповідає діаграмі Прандтля (рис. 1.20).

На даний час для ізотропних матеріалів запропоновано ряд співвідношень між напруженнями та деформаціями (рівнянь реології), що використовуються в теорії пластичності.

Їх поділяють на дві групи — деформаційні теорії пластичності та теорії пластичної течії. У перших встановлюється взаємозв'язок між напруженнями і деформаціями, а в теоріях

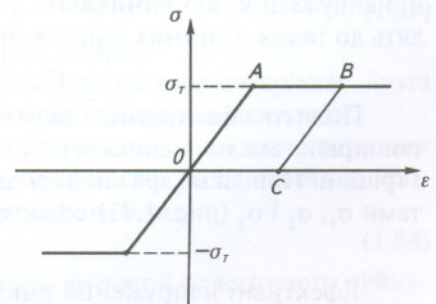


Рис. 1.20. Діаграма Прандтля

пластичної течії — між елементарними приростами пластичних деформацій і напруженнями. Іншими словами, рівняння реології деформаційної теорії пластичності представлені кінцевими співвідношеннями між компонентами тензорів напружень і деформацій, а теорії пластичної течії — у вигляді диференціальних рівнянь.

Розглянемо для деформаційної теорії пластичності *рівняння реології малих пружнопластичних деформацій*, яка ґрунтується на таких гіпотезах.

1. Об'ємна деформація тіла вважається пружною, тобто для об'ємної деформації справедливий закон Гука (1.58)

$$\sigma = K\varepsilon,$$

де σ — середнє напруження в точці (див. систему (1.35));

ε — об'ємна деформація (див. формулу (1.43));

K — об'ємний модуль пружності.

2. Девіатори напружень і деформацій (див. формули (1.36) і (1.43)) збігаються з точністю до постійного множника χ :

$$D_\sigma = \chi D_\varepsilon,$$

або в скалярній формі

$$\begin{cases} \sigma_{xx} - \sigma = \chi(\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3}\varepsilon), \tau_{xy} = \frac{1}{2}\chi\gamma_{xy}; \\ \sigma_{yy} - \sigma = \chi(\varepsilon_{yy} - \frac{1}{3}\varepsilon), \tau_{yz} = \frac{1}{2}\chi\gamma_{yz}; \\ \sigma_{zz} - \sigma = \chi(\varepsilon_{zz} - \frac{1}{3}\varepsilon), \tau_{xz} = \frac{1}{2}\chi\gamma_{xz}. \end{cases} \quad (1.77)$$

Параметр χ визначається із реологічних рівнянь (1.77) через інтенсивності нормальних напружень $\sigma_{\text{інт}} = \sqrt{3}T$ та деформацій $\varepsilon_{\text{інт}} = \frac{\sqrt{2}}{3}T$ (див. формули (1.38) і (1.45)):

$$\chi = \frac{2}{3} \frac{\sigma_{\text{інт}}}{\varepsilon_{\text{інт}}}.$$

3. Співвідношення $\sigma_{\text{інт}} = \Phi(\varepsilon_{\text{інт}})$ не залежить від виду напруженого стану і задає реологічні рівняння (1.77) пружнопластичного матеріалу.

Теорія малих пружнопластичних деформацій справедлива в принципі тільки при простих навантаженнях. Експерименти показують, що і при складних навантаженнях, але близьких до простих, ця теорія дає задовільні результати.

Рівняння напружено-деформованого стану пористих гірських порід, насичених пластовими флюїдами під тиском p , вимагають конкретизації понять про напруження.

Якщо приділяти увагу деформації матеріалу пористого середовища, то необхідно використовувати поняття істинних напружень, які виникають безпосередньо у монолітному матеріалі. При вивченні деформації пористого середовища в цілому як умовно монолітного матеріалу доцільно користуватись поняттям ефективних напружень, тобто напружень, віднесених до одиниці площі пористого середовища, враховуючи зерна породи і пористості. Виділяють також нейтральні напруження, які виникають у пористому тілі під дією внутрішньопорового тиску p і призводять до таких істинних напружень:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = p, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0. \quad (1.78)$$

Поняття ефективних і нейтральних напружень були введені К. Терцагі для м'яких ґрунтів і поширюються на водонасичені гірські породи при умові, що в породі є система зв'язаних пор і тріщин. При дії на зразок породи з поровим тиском p локального поля напружень із компонентами σ_1, σ_2 і σ_3 (рис. 1.21) ефективні σ' напруження визначають як

$$\sigma' = \sigma - p. \quad (1.79)$$

Ефективні напруження викликають зміну конфігурації скелета породи і при певних значеннях — її руйнування, а нейтральні напруження — зміну об'єму матеріалу пористого середовища.

Із формули (1.79) випливає, що зміна нейтральних напружень при постійному полі локальних напружень призводить до відповідної зміни ефективних напружень.

Формули (1.78) і (1.79) відіграють важливу роль у моделюванні напружено-деформованого стану пористих порід і узагальнені Ю.П. Желтовим у тензорній формі:

$$T_{\sigma} = T_{\sigma'} + pT_1, \quad (1.80)$$

де T_{σ} — тензор ефективних напружень, який записується аналогічно (1.32);

T_1 — одиничний тензор.

Враховуючи формулу (1.80), рівняння (1.69) в компонентах тензора ефективних напружень запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho a_x - \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho a_y - \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho a_z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (1.81)$$

Таким чином, при моделюванні деформацій насичених пластовими флюїдами гірських порід використовують рівняння рівноваги (1.81), які розв'язуються з допомогою рівнянь Коші і реології.

1.5.4. ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ

Теорії міцності обґрунтовують можливість використання результатів модельних випробувань матеріалів на міцність при простих видах навантажень у розрахунках на міцність при складному напруженому стані.

Існує ряд теорій міцності, в основу яких покладені відповідні гіпотези руйнування матеріалу.

Перша теорія міцності ґрунтується на припущенні, що причиною руйнування матеріалу є відрив і матеріал руйнується внаслідок досягнення напружень граничного значення. Для складного напруженого стану ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) умова міцності при $\sigma_1 > 0$ має вигляд

$$\sigma_1 < \sigma_p, \quad (1.82)$$

де σ_p — міцність матеріалу на розтяг.

Досліди показують, що перша теорія міцності дає задовільні результати тільки при простих видах навантажень.

Друга теорія міцності також базується на припущенні, що матеріал руйнується в результаті відриву, але при досягненні деформації розтягу граничного значення. Умова міцності має вигляд

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] < \epsilon_p$$

або через еквівалентні напруження

$$\sigma_e = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) < \sigma_p, \quad (1.83)$$

де ϵ_p — гранична деформація матеріалу в момент руйнування на розтяг.

Перша і друга теорії міцності належать до теорій крихкого руйнування матеріалів. Друга теорія міцності не знайшла практичного застосування при складних напружених станах.

Третя теорія міцності побудована на гіпотезі, що матеріал руйнується внаслідок пластичних деформацій при досягненні максимальних дотичних напружень границі текучості (тобто за критерієм Сен-Венана—Леві). Умова міцності для складного напруженого стану

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 < \sigma_T. \quad (1.84)$$

Четверта (енергетична) теорія міцності, як і третя, належить до теорії пластичного руйнування. Вважається, що матеріал руйнується при досягненні питомої енергії деформації граничного

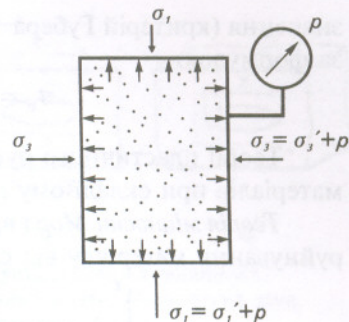


Рис. 1.21. Схема для визначення ефективних напружень

значення (критерій Губера–Мізеса). Умова міцності через еквівалентні напруження визначається за формулою

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} < \sigma_T. \quad (1.85)$$

Теорії пластичного руйнування задовільно узгоджуються з експериментом для ізотропних матеріалів при складному напруженому стані і застосовуються на практиці.

Теорія міцності Мора враховує залежність граничного дотичного напруження (τ_{3C}) у момент руйнування матеріалу від середнього нормального напруження (σ), тобто

$$\tau_{3C} = f(\sigma), \quad (1.86)$$

$$\text{де } \tau_{3C} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2; \sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2.$$

Побудова кривої (1.86) здійснюється на основі незалежних випробувань матеріалу, наприклад (рис. 1.22):

розтяг $\sigma_1 > 0; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (круг 1, σ_p — міцність на розтяг);

зсув $\sigma_1 = -\sigma_3; \sigma_2 = 0$ (круг 2, σ_{3C} — міцність на зсув);

стиснення $\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \sigma_3 < 0$ (круг 3, σ_c — міцність на стиснення).

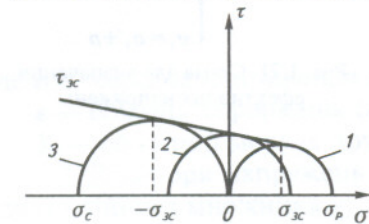


Рис. 1.22. Графік залежності $\tau_{3C} = f(\sigma)$

Огинаюча кругів Мора, побудованих за результатами випробувань (рис. 1.22), відображає залежність (1.86), яку звичайно апроксимують лінійною функцією

$$\tau_{3C} = \tau_{3C}^0 + A\sigma,$$

де τ_{3C}^0 — граничне значення дотичних напружень при $\sigma = 0$;

A — коефіцієнт внутрішнього тертя.

Узагальненням залежності (1.86) є умова виду

$$\sigma_{\text{инт}}^p = f(\sigma), \quad (1.87)$$

де $\sigma_{\text{инт}}^p$ — гранична інтенсивність дотичних напружень у момент руйнування матеріалу;

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3.$$

За результатами незалежних випробувань будують криві (1.86), (1.87).

Вважається, що найбільш повною і наочною характеристикою міцності гірської породи в складному напруженому стані є огинаюча максимальних кругів Мора, або *паспорт міцності*.

Теорія міцності Гріффітса побудована на гіпотезі руйнування матеріалу шляхом розповсюдження тріщин, тобто дефектів матеріалу під дією навантажень. Вважається, що матеріал довільного тіла вміщує мікротріщини, які під дією навантаження можуть збільшуватись і призводити до руйнування тіла або залишатись незмінними.

Розподіл мікротріщин по об'єму тіла є випадковим, і тому значення міцності також випадкове. Експериментально це переконливо підтверджується розсіюванням значень міцності при випробуваннях однакових зразків в одних і тих самих умовах та проявом так званого масштабного ефекту: більші зразки мають меншу міцність, ніж менші зразки такої самої форми. Це характерно для всіх крихких тіл, в тому числі і для гірських порід.

Дослідження свідчать про поступовий розвиток руйнування і про більшу роль первинних дефектів у формуванні картини руйнування. Тріщини починають розвиватися задовго до повного руйнування тіла.

В основу критерію Гріффітса покладено припущення, що руйнування матеріалу відбувається, коли рівень напруженого стану поблизу вершини тріщини досягає граничного значення, що характеризує даний матеріал у відповідних умовах експлуатації (температура, швидкість навантаження і т. ін). Формально умова міцності, або стійкості тріщини, оцінюється порівнянням значення коефіцієнта інтенсивності напружень $K_{\text{инт}}$ із критичним K_c :

$$K_{\text{инт}} < K_c. \quad (1.88)$$

Значення $K_{\text{инт}}$ визначається на основі розв'язку відповідних модельних задач теорії пружності для тіла з тріщиною. Наприклад, для простих випадків плоского і антиплоского напруженого станів (рис. 1.23) $K_{\text{инт}}$ визначається за формулами

$$K_{\text{инт}} = \sigma_1 \sqrt{\pi l}; K_{\text{инт}} = \tau_1 \sqrt{\pi l}; K_{\text{инт}} = \tau_2 \sqrt{\pi l}, \quad (1.89)$$

де σ_1, τ_1, τ_2 — відповідно нормальне та дотичні напруження.

Критичне значення коефіцієнта інтенсивності напружень визначають з досліду при відомій довжині тріщини для відповідної схеми навантаження за формулами типу (1.89).

Умова (1.88) з оцінками формул (1.89) відображає міцність крихкого руйнування матеріалу. Відомо їх узагальнення на випадок пружнопластичного напруженого стану, в тому числі і побудова так званих діаграм оцінки руйнувань за критеріями крихкого і пластичного руйнувань матеріалу.

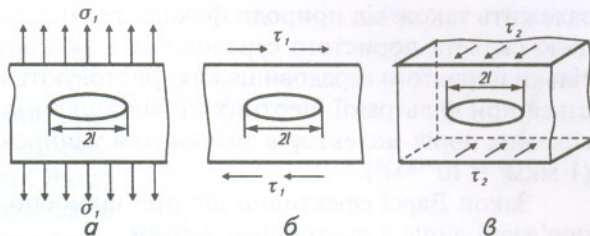


Рис. 1.23. Розрахункові схеми з тріщиною:
а—плоский рівномірний розтяг; б—плоский зсув;
в—антиплоский зсув

1.5.5. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

При бурінні відбувається масообмін між свердловиною і розкритими пластами, який визначається фільтраційними, дифузійними, осмотичними та іншими процесами. Фільтрація належить до найбільш вагомих процесів, що впливають на виникнення ускладнень при бурінні і кріпленні свердловин, ефективність розкриття і освоєння продуктивних горизонтів та ін.

Пустоти пористого середовища можуть бути заповнені різними фазами — нафтою, водою, газом.

Характеристикою насиченості пористого простору гірської породи служать коефіцієнти насиченості нафтою S_n , водою S_v і газом S_g , які визначаються відношенням об'єму пор, зайнятих відповідною фазою, до загального об'єму пор.

Рух рідин або газу в пористих породах внаслідок перепаду тиску називають фільтрацією. Потік рідини або газу в пористому середовищі характеризується об'ємною Q або масовою G витратою. Відношення об'ємної витрати рідини або газу через гірську породу до площі фільтрації F називається швидкістю фільтрації:

$$v = \frac{Q}{F}.$$

За площу фільтрації приймається площа поверхні пористого середовища, нормально орієнтована відносно напрямку швидкості фільтрації.

До площі фільтрації належать як площа пустот, так і площа твердої складової (скелета) пористого середовища, тому швидкість фільтрації є умовна (фіктивна) величина, що введена для зручності аналізу процесів руху в пористому середовищі. Дійсна (істинна) швидкість фільтрації v_d пов'язана з фіктивною швидкістю v співвідношенням

$$v_d = \frac{v}{m_e},$$

де m_e — ефективна пористість породи.

Закони фільтрації виражають зв'язок між швидкістю фільтрації і умовами, в яких вона відбувається. З позицій механіки суцільних середовищ закони фільтрації акумулюють рівняння руху та реології і носять фундаментальний характер.

Закон фільтрації Дарсі, або **лінійний закон фільтрації**, був установлений експериментально і узагальнений в диференціальній формі:

$$v = -\frac{k}{\eta} \text{grad } p, \quad (1.90)$$

де v — вектор швидкості фільтрації;

k — коефіцієнт проникності пористого середовища;

η — в'язкість рідини або газу;

$\text{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ — операція градієнта;

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — одиничні орти декартової системи координат.

Коефіцієнт проникності характеризує здатність пористої гірської породи пропускати через себе рідину або газ при створенні перепаду тиску і має розмірність площі. Коефіцієнт проникності

залежить також від природи флюїду та умов фільтрації, що зумовлено фізико-хімічною взаємодією скелета пористого середовища з активними компонентами флюїду. Для характеристики тільки пористого середовища використовують коефіцієнт абсолютної проникності, який вимірюється при фільтрації інертних по відношенню до скелета породи рідини або газу. Проникність гірських порід-колекторів змінюється у широких межах — від тисячних долей до одиниць мкм² (1 мкм² = 10⁻¹² м²).

Закон Дарсі ефективно діє при відносно малих швидкостях фільтрації, коли втрати тиску пов'язані лише з внутрішнім тертям.

Закон фільтрації Форхгеймера, або двочленний закон фільтрації, в диференціальній формі записується у вигляді

$$\text{grad } p = -\frac{\eta}{k} v - \frac{\rho}{\beta} v |v|, \quad (1.91)$$

де ρ — густина рідини або газу;

β — коефіцієнт структури порового простору.

Коефіцієнт структури порового простору, як і коефіцієнт проникності, визначається дослідним шляхом і характеризує інерційну складову втрат тиску при фільтрації.

Закон фільтрації Форхгеймера є більш загальним у порівнянні з законом Дарсі. Для малих швидкостей фільтрації або великих значень параметра β внесок другої складової у формулу (1.91) буде незначним, і градієнт тиску залежатиме, в основному, від сил тертя, тобто справедливим буде закон Дарсі (1.90).

Законои фільтрації (1.90) і (1.91) одержані для ньютонівської (в'язкої) рідини або газу. Порушення лінійного закону фільтрації може бути пов'язане також з аномальними реологічними властивостями рідини. Закон фільтрації з початковими градієнтами зсуву відображає фільтрацію в'язкопластичної рідини:

$$v = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |\text{grad } p| < \varphi_0; \\ -\frac{k}{\eta} \left(1 - \frac{\varphi_0}{|\text{grad } p|} \right) \text{grad } p, & \text{якщо } |\text{grad } p| \geq \varphi_0, \end{cases} \quad (1.92)$$

де φ_0 — початковий градієнт зсуву.

Значення початкового градієнта зсуву для одновимірної фільтрації може бути оцінене за формулою

$$\varphi_0 = \alpha \frac{\tau_0}{\sqrt{k}},$$

де τ_0 — динамічне напруження зсуву рідини;

α — емпіричний коефіцієнт (для пісків дорівнює 0,015—0,018).

Закон Дарсі узагальнюють також на випадок *багатофазової течії* в пористому середовищі. Для цього розповсюджують поняття швидкості фільтрації на окрему фазу v_i як відношення об'ємної витрати даної фази Q_i до загальної площі фільтрації

$$v_i = \frac{Q_i}{F}.$$

Пропускна здатність пористого середовища для конкретної фази визначається коефіцієнтом відносної фазової проникності

$$\bar{k}_i = \frac{k_i}{k},$$

де k_i — коефіцієнт проникності i -ї фази.

Закон фільтрації Дарсі для кожної фази записується у вигляді

$$v_i = -\frac{\bar{k}_i k}{\eta} \text{grad } p_i. \quad (1.93)$$

У загальному випадку градієнти тиску $\text{grad } p_i$ в фазах за рахунок капілярного тиску різні, однак цією різницею часто нехтують і тиски у фазах приймають однаковими.

Коефіцієнти фазових проникностей залежать від насиченості пористого середовища. На рис. 1.24 показані криві відносних фазових проникностей для нафти і води при їх сумісній фільтрації. Аналогічні залежності спостерігаються також при інших випадках двофазової сумісної фільтрації.

Залежності фазових проникностей від насиченості пористого середовища можуть бути встановлені тільки дослідним шляхом для відповідних умов фільтрації.

Основними характерними ознаками **задач фільтрації рідин та газів у пластах** є кількість фаз, кількість компонентів та розмірність системи просторових координат. Якщо модель враховує рух лише однієї фази, то її називають однофазовою, а в протилежному випадку — багатфазовою. Якщо хоча б одна із фаз складається з двох або більше компонентів, то така модель називається багатокомпонентною, в протилежному випадку — однокомпонентною. За розмірністю просторової системи координат розрізняють одновимірні, двовимірні і тривимірні задачі фільтрації.

Для однофазової однокомпонентної фільтрації в залежності від стану системи в часі розрізняють задачі усталеної та неусталеної фільтрації. Усталені задачі фільтрації характеризуються незмінними у часі умовами або параметрами фільтрації.

Формулювання моделей фільтрації рідин або газів у пластах у загальному випадку включає закон фільтрації, рівняння збереження маси, рівняння стану та граничні і початкові (для неусталеної фільтрації) умови.

Рівняння збереження маси, або неперервності, записують у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho J = 0, \quad (1.94)$$

де m — пористість пласта;

J — об'ємна інтенсивність можливих джерел або стоків речовини (наприклад, свердловин).

При відсутності джерел або стоків рівняння неперервності (1.94) набуває вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.95)$$

а для нестисливих рідини і скелета пористого середовища ($\rho = \text{idem}$, $m = \text{idem}$)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.96)$$

Рівняння стану, так само як у механіці суцільних середовищ, відображають залежність фізичних величин, що входять у закон фільтрації та рівняння неперервності, від параметрів стану. Наприклад, при використанні закону фільтрації Дарсі рівняння стану можуть бути подані таким чином:

для нестисливих рідини і пористого середовища

$$\rho = \text{idem}; \eta = \text{idem}; m = \text{idem}; k = \text{idem};$$

для баротропних рідини і пористого середовища

$$\rho = \rho(p); \eta = \eta(p); m = m(p); k = k(p)$$

і т. п. Параметри пласта (пористого середовища) можуть бути залежними також від координат (наприклад, $k = k(x, y, z)$).

Граничні умови формулюються в залежності від суті задачі фільтрації. Їх кількість має бути достатньою для одержання однозначного розв'язку задачі, тобто визначення постійних інтегрування. *Початкові умови* задають у задачах неусталеної фільтрації.

Об'ємна витрата нестисливої рідини при *усталеній фільтрації* за законом Дарсі в однорідному круговому пласті визначається формулою Дюпюї:

$$Q = \frac{2\pi k h (p_k - p_c)}{\eta \ln(R_k/R_c)}, \quad (1.97)$$

де h — товщина пласта;

R_c , R_k — відповідно радіуси свердловини і контуру пласта;

p_c , p_k — відповідно тиск у свердловині і тиск на контурі пласта.

Якщо $p_k > p_c$, то свердловина буде проявляти з дебітом Q , а при $p_c > p_k$ — поглинати.

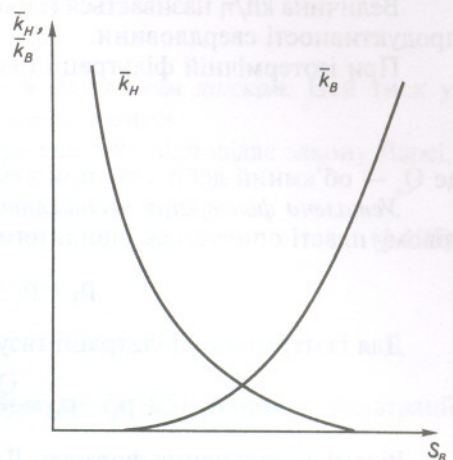


Рис. 1.24. Криві відносних фазових проникностей для нафти ($\bar{k}_H$) і води ($\bar{k}_B$) при їх сумісній фільтрації

Величина kh/η називається гідропровідністю пласта, а $Q/(p_k - p_c)$ при $p_k > p_c$ — коефіцієнтом продуктивності свердловини.

При ізотермічній фільтрації газу в аналогічних умовах формула Дюпюї набуває вигляду

$$Q_o = \frac{\pi kh(p_k^2 - p_c^2)}{\eta p_o \ln(R_k/R_c)}, \quad (1.98)$$

де Q_o — об'ємний дебіт газу при атмосферному тиску p_o .

Усталена фільтрація нестисливої рідини за законом Форхгеймера (1.91) в однорідному круговому пласті описується рівнянням

$$p_k - p_c = \frac{Q\eta}{2\pi kh} \ln \frac{R_k}{R_c} + \frac{\rho(R_k - R_c)Q|Q|}{4\pi^2 h^2 \beta R_k R_c}. \quad (1.99)$$

Для ізотермічної фільтрації газу в таких умовах справедлива формула

$$p_k - p_c = \frac{Q_o \eta p_o}{\pi kh} \ln \frac{R_k}{R_c} + \frac{\rho(R_k - R_c)Q_o|Q_o|p_o}{2\pi^2 h^2 \beta R_k R_c}. \quad (1.100)$$

Відомі узагальнення формули Дюпюї на фільтрацію в неоднорідному за проникністю пласті. Наприклад, усталена фільтрація нестисливої рідини в пласт з дискретно змінною проникністю, яка моделює кірку, зону кольматації і власне пласт, описується рівнянням

$$Q = \frac{2\pi k_3 h(p_k - p_c)}{\eta \left(\frac{k_3}{k_1} \ln \frac{R_1}{R_c} + \frac{k_3}{k_2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \ln \frac{R_k}{R_2} \right)}, \quad (1.101)$$

де k_1, k_2, k_3 — проникності відповідно глинистої кірки, зони кольматації і пласта;

R_1, R_2 — радіуси границь між глинистою кіркою і зоною кольматації, а також зоною кольматації і пластом.

У загальному випадку задача усталеної фільтрації нестисливої рідини за законом Дарсі в пористому середовищі з $k = \text{idem}$ зводиться до інтегрування рівняння Лапласа

$$\Delta p = 0 \quad (1.102)$$

з відповідними граничними умовами,

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — операція Лапласа.

Для лінійного закону фільтрації і баротропних рівнянь стану існує функція Христиановича:

$$H = \int \frac{\rho(p)k(p)}{\eta(p)} dp,$$

яка задовольняє рівнянню

$$\Delta H = 0.$$

Це дає змогу використати принцип математичної аналогії: розв'язки задачі (1.102), які отримані для усталеної фільтрації нестисливої рідини, можна використовувати для розрахунків фільтрації баротропної рідини шляхом заміни тиску на функцію Христиановича.

При бурінні в результаті гідродинамічної взаємодії із свердловиною тиск у пласті змінюється. Наприклад, для однорідного кругового пласта і усталеної фільтрації, яка відповідає умовам формули Дюпюї (1.97), розподіл тиску у пласті визначається рівнянням

$$p(r) = p_c - \frac{p_c - p_k}{\ln(R_k/R_c)} \ln \frac{r}{R_c}. \quad (1.103)$$

Для неоднорідного пласта, що відповідає умовам формули (1.101), розподіл тиску у пласті описується виразом

$$p(r) = \begin{cases} p_c - \frac{p_c - p_k}{k_1 B} \ln \frac{r}{R_c} & \text{при } R_c \leq r \leq R_1; \\ p_c - \frac{p_c - p_k}{k_2 B} \left(\ln \frac{r}{R_1} + \frac{k_2}{k_1} \ln \frac{R_1}{R_c} \right) & \text{при } R_1 \leq r \leq R_2; \\ p_k - \frac{p_c - p_k}{k_3 B} \ln \frac{r}{R_c} & \text{при } R_2 \leq r \leq R_k, \end{cases} \quad (1.104)$$

$$\text{де } B = \frac{1}{k_1} \ln \frac{R_1}{R_c} + \frac{1}{k_2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{k_3} \ln \frac{R_k}{R_2}.$$

Поточне значення тиску в пласті називають *динамічним пластовим тиском*. Цей тиск у деяких випадках визначає характер ускладнень при бурінні свердловини.

Диференціальне рівняння неусталеної фільтрації пружної рідини, яка відповідає закону Дарсі, у пружному пористому середовищі має вигляд

$$\Delta H = \frac{\partial(m\rho)}{\partial t}. \quad (1.105)$$

Для рівнянь стану

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_p (p - p_0)];$$

$$m = m_0 + \beta_c (p - p_0);$$

$$k = \text{idem}, \eta = \text{idem}$$

і без урахування нелінійних складових правої частини формули (1.105) рівняння фільтрації набуває вигляду

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \Delta p, \quad (1.106)$$

де $\kappa = k/[\eta(m_0 \beta_p + \beta_c)]$ — коефіцієнт п'єзопровідності пласта;

β_p, β_c — відповідно коефіцієнти об'ємного стиснення рідини і скелета гірської породи;

m_0, ρ_0 — відповідно пористість породи і густина рідини при тиску p_0 .

Коефіцієнт п'єзопровідності пласта характеризує швидкість перерозподілу тиску при неусталеній фільтрації пружної рідини в пружному пористому середовищі і змінюється в межах від 0,1 до 5 м²/с.

Рівняння (1.106), отримане В.Н. Щелкачовим, називається *рівнянням п'єзопровідності*, або *основним диференціальним рівнянням пружного режиму*. Для інтегрування рівняння (1.106) необхідно задати початкову та дві граничні умови.

Задача неусталеної радіальної фільтрації

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right)$$

з початковою і граничними умовами

$$p(r, t) = p_k \quad \text{при } t = 0;$$

$$p(r, t) = p_k \quad \text{при } r \rightarrow \infty;$$

$$\left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{|r \rightarrow 0} = \frac{Q_0 \eta}{2\pi k h},$$

яка відповідає пуску свердловини в експлуатацію в момент часу $t = 0$ з дебітом $Q_0 = \text{idem}$, має розв'язок

$$p(r, t) = p_k + \frac{Q_0 \eta}{4\pi k h} \text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\kappa t} \right), \quad (1.107)$$

де $\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^u}{u} du$ — інтегральна показникова функція.

При значеннях аргументу $(4\kappa t/r^2) \geq 8,33$ апроксимація функції Ei у вигляді

$$\text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\kappa t} \right) = 0,5772 - \ln \frac{4\kappa t}{r^2} \quad (1.108)$$

забезпечує похибку її обчислення з точністю до 1%. Розв'язок (1.107) з урахуванням (1.108)

$$p_k - p(r, t) = \frac{Q_0 \eta}{4\pi k h} \left(\ln \frac{4\kappa t}{r^2} - 0,5772 \right)$$

використовується для визначення колекторських властивостей пласта за даними дослідження свердловин при пружному режимі фільтрації.